1.7 Dos partículas puntuales de masa m están unidas por una barra rígida de masa despreciable de longitud l, cuyo centro esta obligado a moverse en un círculo de radio a. El sistema se mueve en el espacio bajo la acción del campo gravitacional de la tierra. Obtener la Lagrangiana del sistema y las ecuaciones de movimiento.

Respuesta:

Este sistema de dos partículas puede ser descrito por el vector de centro de masa R y las posiciones en relación con el centro de masa, que podemos llamar r_1' y r_2' (usamos r primadas para diferenciarlas ya que estas no parten del origen, el vector va desde el centro de masas hacia la posición de cada masa). La energía cinética total se da por la energía cinética del centro de masa más la energía cinética de las partículas en relación con el centro de masa, es decir:

$$T = T_{CM} + T_1' + T_2' = \frac{M}{2}\,\dot{r}_{CM}^2 + \frac{m_1}{2}\,\dot{r}_1'^{\,2} + \frac{m_2}{2}\,\dot{r}_2'^{\,2} \tag{1}$$

Primero calculamos el vector de posición del centro de masas:

$$\mathbf{r}_{CM} = \big(a\cos\theta,\ a\sin\theta\big).$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{d}{dt}\big(a\cos\theta,\ a\sin\theta\big) = \big(-a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}\big).$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{CM}^2 = (-a\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + (a\cos\theta\,\dot{\theta})^2 = a^2\dot{\theta}^2\big(\sin^2\theta + \cos^2\theta\big).$$

Simplificando:

$$\dot{\mathbf{r}}_{CM}^2 = a^2\dot{\theta}^2.$$

Ahora calculamos el vector posición relativa de la masa 1 con respecto del centro de masa,

$$\mathbf{r}_1' = a\Big(\sin\theta\cos\varphi\,, \sin\theta\sin\varphi\,, -\cos\theta\Big)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1' = a\Big(\frac{d}{dt}(\sin\theta\cos\varphi)\,,\ \frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\varphi)\,,\ \frac{d}{dt}(-\cos\theta)\Big)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1' = a\Big(\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - \sin\theta\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,,\ \cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + \sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,,\ \sin\theta\,\dot{\theta}\Big)$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_1'|^2 = (a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\dot{\theta}^2 - 2a\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi\,a\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} + a^2\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi})+$$
$$(a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + ar\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi\,a\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} + a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2)+$$
$$(a^2\sin\theta\dot{\theta}^2)$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_1'|^2 = [a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2(cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2]$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_1'|^2 = a^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + a^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_1'|^2 = a^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Sabemos que el vector $\dot{\mathbf{r}}_1'$ es igual pero en direccion contraria de $\dot{\mathbf{r}}_2'$. Por lo tanto:

$$\mathbf{r}_2' = -\mathbf{r}_1', \qquad |\dot{\mathbf{r}}_2'|^2 = |\dot{\mathbf{r}}_1'|^2, \qquad m_1 = m_2 = m$$

Ahora conociendo las velocidades, podemos calcular la energía cinética total del sistema:

$$T = T_{CM} + T_1' + T_2' = \frac{M}{2}(a^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2}(a^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)) + \frac{m}{2}(a^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2))$$

$$T = \frac{(2m)}{2}(a^2\dot{\theta}^2) + m_1a^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2))$$

Por lo tanto, la energia cinetica total del sistema es:

$$T = ma^2\dot{\theta}^2 + ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$